Tentamen Elektriciteit en Magnetisme 2

Vrijdag 12 november 2010, 9:00-12:00, tentamenhal 3

Voordat je begint, lees het volgende:

- Er zijn 4 sommen met een totaal van 50 punten.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel papier.
- Begin elke som op een nieuw vel papier.
- Onleesbaar handschrift wordt fout gerekend.
- *Succes!*

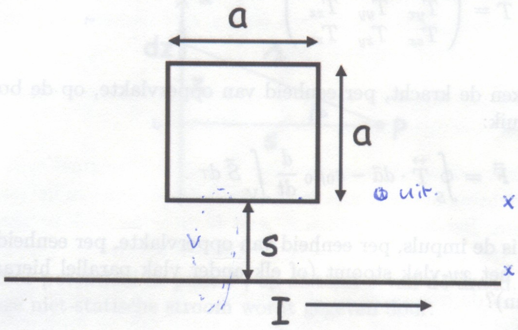
$\frac{50}{31} \cdot \times 9 + 1$

Blvt

Som 1 (*40 minuten; 12 punten totaal*) 10

3 pnt (a) Geef de integraal-vorm van de wet van Ampère voor het magnetische veld $\vec{B}$; geef de integraal-vorm van de wet van Faraday voor de emf $\mathcal{E}$. Formuleer de wet van Lenz.

Een vierkante lus ("loop") draad (zijde a) ligt op een tafel, op afstand s van een zeer lange draad, waardoor een stroom I loopt, zie de Figuur:



3 pnt (b) Bereken het magnetisch veld $\vec{B}$ van de stoomdraad; bereken de flux van $\vec{B}$ door de lus.

4 pnt (c) Als iemand de lus direct (d.w.z. naar boven in de Figuur) wegtrekt van de stroomdraad, met snelheid v, welke emf wordt dan opgewekt? In welke richting (met de klok mee of tegen de klok in) loopt de stroom in de lus?

2 pnt (d) En als de lus met snelheid v naar rechts wordt getrokken?

$8 \sim 10$

$\frac{(x_1 - x)}{v} = t$

10 $st = v$

Som 2 (*40 minuten; 12 punten totaal*)

Beschouw een condensator van twee oneindige parallelle platen, waarvan de onderste plaat (op $z = -d/2$) een oppervlakteladingsdichtheid $-\sigma$ heeft, en de bovenste plaat (op $z = +d/2$) een oppervlakteladingsdichtheid $+\sigma$.

4 pnt (a) Bereken alle 9 elementen van de Maxwell stress-tensor (zie beneden), in het gebied tussen de platen. Schrijf het antwoord als een 3×3 matrix:

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{zz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

4 pnt (b) Bereken de kracht, per eenheid van oppervlakte, op de bovenste plaat. Gebruik:

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S}\, d\tau \ .$$

X.

2 pnt (c) Wat is de impuls, per eenheid van oppervlakte, per eenheid van tijd, die door het xy-vlak stoomt (of elk ander vlak parallel hieraan, tussen de platen)?

2 pnt (d) Deze impuls wordt geabsorbeerd op de platen, waardoor de platen een terugstoot krijgen (tenzij er een mechanische kracht is die hen op hun positie vasthoudt). Bepaal de terugstootkracht, per eenheid van oppervlakte, op de bovenste plaat; vergelijk het antwoord met (b).

De elementen van de Maxwell stress-tensor worden gegeven door ($i, j = x, y, z$):

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2 \right) \ .$$

$F = \frac{dp}{dt}$

S.

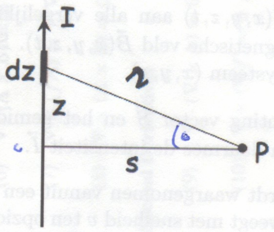
5

Som 3 (*40 minuten; 13 punten totaal*)

Door een oneindig-lange rechte draad loopt een stroom

$$I(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \, , \\ I_0 & , \quad t > 0 \, ; \end{cases}$$

dat wil zeggen, een constante stroom I_0 wordt op $t = 0$ plotseling aangezet. De draad is elektrisch neutraal en ligt langs de z-as, zie de Figuur:



3 pnt (a) De vector-potentiaal in punt P, op afstand s van de draad, ten gevolge van deze niet-statische stroom wordt gegeven door:

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}z \; .$$

Leg uit wat de fysische betekenis is van de geretardeerde ("retarded") tijd t_r. Druk t_r uit in de tijd t en $\mathscr{r}$.

4 pnt (b) Werk uit welk segment van de draad op tijd t bijdraagt aan de integraal. Bewijs daarmee dat de vector-potentiaal gelijk is aan:

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) \hat{z} \; .$$

3 pnt (c) Druk de fysische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ uit in de scalar- en vector-potentialen, V en $\vec{A}$. Bereken $\vec{E}(s,t)$ en $\vec{B}(s,t)$.

3 pnt (d) Laat zien dat we als $t \to \infty$ de statische velden terugvinden.

Hint:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \ln(\sqrt{s^2 + z^2} + z)$$

$\frac{\sqrt{3}}{s} \cdot s$

$\frac{v \cdot t}{s}$

$\ln\left(\frac{ct + \sqrt{ct^2 - s^2}}{s}\right)$

$t_r = t - r/c$

4

Som 4 (*40 minuten; 13 punten totaal*)

Een vlakke golf met hoek-frequentie ω plant zich in vacuüm voort in de x-richting. Het elektrische veld is gepolariseerd in de y-richting met amplitude E_0:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\hat{y}\ .$$

4 pnt (a) Geef de vergelijkingen van Maxwell (in vacuüm) in differentiële vorm. Laat zien dat $\vec{E}(x,y,z,t)$ aan alle vergelijkingen voldoet en vind het bijbehorende magnetische veld $\vec{B}(x,y,z,t)$. Schets de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden in het coördinatensysteem (x,y,z).

1

2 pnt (b) Bereken de Poynting vector $\vec{S}$ en het gemiddelde ervan over een hele periode. Bereken daarmee de intensiteit $\vec{I}$.

1

4 pnt (c) Dezelfde golf wordt waargenomen vanuit een inertiaal-systeem S' dat in de x-richting beweegt met snelheid v ten opzichte van het oorspronkelijke systeem. Bereken de velden $\vec{E}'$ and $\vec{B}'$ in S' en druk ze uit in de coordinaten (ct', x', y', z') in S'. Leg uit (of leid af) dat $kx - \omega t = k'x' - \omega' t'$.

1

3 pnt (d) Bereken de frequentie ω', golflengte λ' en de snelheid van de golven in S'. Wat gebeurt met de frequentie, amplitude en intensiteit van de golf wanneer v de lichtsnelheid c benadert?

1

Lorentz transformatie van het elektrische veld:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}\ ;$$
$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}\ ;$$

voor het magnetische veld, vervang $\vec{E} \to c\vec{B}$ en $\vec{B} \to -\vec{E}/c$; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

$(k\bar{x} - \omega\bar{t})$

12

$\bar{k} = \alpha k$

$\omega = \alpha \bar{\omega}$

$\alpha = \gamma(1 - v/c)$

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VEC

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREM

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$